LA GRANGE VADROUILLE

ACTIVITÉS MATHÉMATIQUES ITINÉRANTES

Institut de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques (IREM), Université Grenoble Alpes

Livret de l'enseignant

LA GRANGE DES MATHS
POUR LE PLAISIR DES MATHS

Introduction

La Grange Vadrouille se compose d'une vingtaine d'activités sélectionnées pour leur intérêt pédagogique et ludique, et pour leur faible encombrement.Chaque activité est constituée d'objets à manipuler et d'un panneau explicatif de l'activité, le tout pouvant s'installer intégralement sur un pupitre individuel. L'objectif de ce livret est de donner brièvement le contexte historique et mathématique de chaque activité, de donner des pistes pour l'accompagnement des élèves dans leur découverte, et de fournir aux enseignants les solutions des problèmes.

Installation. Les panneaux sont installés dans une salle de l'établissement avec le matériel correspondant. À chaque activité correspond un numéro, inscrit en bas à droite du panneau correspondant. On retrouve ce numéro sur le matériel à manipuler, ce qui permet d'associer plus facilement les objets aux panneaux lors de l'installation. Chacun des panneaux est intégralement reproduit dans ce livret.

Matériel supplémentaire à prévoir. La plupart des activités sont fournies avec tout le matériel nécessaire. Certains élèves pourront vouloir utiliser du papier et un crayon pour les aider dans leurs recherches.

Pour l'activité *Pliages* (page 34), les élèves auront besoin d'une **feuille de papier** quelconque.

Pour les activités *Du rectangle au carré* (page 85) et *L'hypercarte* (page 78), les élèves auront besoin d'une **feuille de papier**, de préférence (mais pas obligatoirement) **cartonnée**, de format A6 au minimum, ainsi que de **ciseaux**.

Session avec les élèves. Les élèves pourront découvrir les activités pendant un temps d'une à deux heures, seuls ou en binômes. Même si elles sont conçues pour être compréhensibles sans l'aide d'un enseignant, il est fortement recommandé qu'un ou plusieurs professeurs connaissent certaines activités pour guider les élèves.

Reprise d'activités en classe. Il peut être intéressant de choisir une ou deux activités à approfondir en classe, afin que les élèves se placent dans un temps de recherche plus long. Ce livret contient des pistes dans ce sens.

La Grange des Maths

L'association *La Grange des Maths* veut offrir à tous l'opportunité de découvrir, ou redécouvrir, le vaste univers des mathématiques, support essentiel de notre société de haute technologie. Sans faire appel au « tout numérique », que l'on retrouve partout de façon abondante, La Grange des Maths propose une approche très concrète : utiliser de simples objets bien réels, faciles à manipuler, à observer, à déplacer, permettant de sentir venir une solution et d'aboutir à un résultat. Autrement dit, le bonheur de chercher, de cheminer et de trouver, par soi-même ou avec d'autres, à son rythme en prenant son temps, hors de toute sanction ou compétition, pour constater que l'on peut « faire des maths » sans le savoir et y trouver un véritable plaisir.

Les missions de l'association comprennent :

– la conception du centre La Grange des Maths, à Varces, au sud de Grenoble, où de nombreuses activités mathématiques seront proposées dans un magnifique bâtiment restauré au coeur du parc Beylier,

– le développement de La Grange Vadrouille, notre système itinérant destiné à rayonner dans la région Auvergne-Rhône-Alpes, en proposant des activités dans le même esprit que celles qui seront situées à Varces,

– l'organisation de conférences grand public, et la participation à diverses manifestations avec notre stand d'activités "La Grange en Fête", à Grenoble et dans son agglomération.

La Grange des Maths intéressera naturellement les familles et les scolaires du primaire, collège ou lycée, mais souhaite également s'adresser à tous les publics.

Lien avec les programmes officiels

Toutes les activités s'inscrivent dans le cadre suivant, qui constitue un objectif à la fois du collège et du lycée :

> **Chercher**
>
> – Extraire d'un document les informations utiles, les reformuler, les organiser, les confronter à ses connaissances.
>
> – S'engager dans une démarche scientifique, observer, questionner, manipuler, expérimenter (sur une feuille de papier, avec des objets, à l'aide de logiciels), émettre des hypothèses, chercher des exemples ou des contre-exemples, simplifier ou particulariser une situation, émettre une conjecture.
>
> – Tester, essayer plusieurs pistes de résolution.
>
> – Décomposer un problème en sous-problèmes.
>
> Programme officiel du Cycle 4, année 2016

Nous indiquons ci-dessous de manière plus précise le lien entre certaines sections du programme et les activités. Il ne s'agit pas de classer les activités par niveau, mais simplement de mettre en valeur les notions mathématiques abordées dans chacune d'elles. Qu'elle soit en lien avec des notions élémentaires ou avancées, chaque activité est conçue pour être accessible aux élèves de tous niveaux.

Cycle 3 (CM1, CM2, 6^{e})

Utiliser et représenter les grands nombres entiers, des fractions simples, les nombres décimaux

Pliages	p. 34
Tangram	p. 46

Calculer avec des nombres entiers et des nombres décimaux

Pliages	p. 34
Le compte est bon	p. 55
Labyrinthe	p. 62
Quel est leur âge ?	p. 69

Comparer, estimer, mesurer des grandeurs géométriques avec des nombres entiers et des nombres décimaux : longueur (périmètre), aire, volume, angle

(Se) repérer et (se) déplacer dans l'espace en utilisant ou en élaborant des représentations

Reconnaître, nommer, décrire, reproduire, représenter, construire quelques solides et figures géométriques

Cycle 4 (5e, 4e, 3e)

Utiliser les notions de géométrie plane pour démontrer

Représenter l'espace

Comprendre et utiliser les notions de divisibilité et de nombres premiers

Utiliser le calcul littéral

Statistiques

Algorithmique et programmation

Lycée

Suites et raisonnement par récurrence

Logique et raisonnement

Graphes

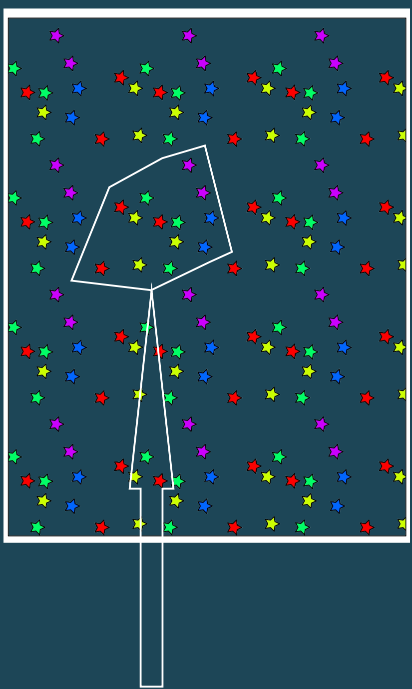
Statistiques

Calcul littéral

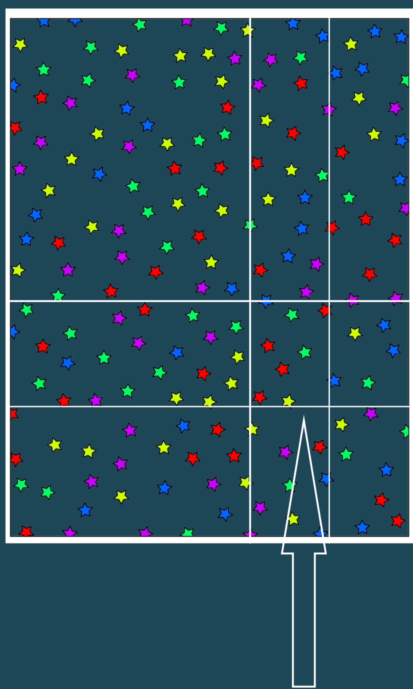
Contenu

Combien d'étoiles ?

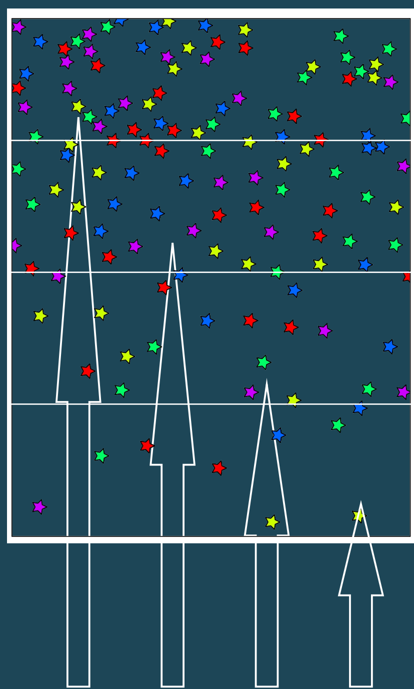
Pour évaluer rapidement le nombre d'étoiles sur une image,
on utilise trois techniques :



Comptage par motif, ici 12 motifs de 13 étoiles.



Comptage par portion, ici 7 étoiles dans 1/25 de l'image.



Comptage par lot, ici 4 lots de densité différentes.

Estimer le nombre total d'objets sur les images devant vous.
Estimer la proportion d'objets bleus.

Estimer le nombre de personnes à une manifestation, le nombre de flamands roses sur un lac demande de la méthode et des connaissances en statistiques.
La Ligue de Protection des oiseaux d'Alsace l'explique sur son site www.alsace.lpo.fr.

Combien d'étoiles ?

Historique. Il faut remonter au temps d'Hypparque, mathématicien et astronome grec du IIe s. avant J.C. pour retrouver les premières traces de comptage systématique des étoiles. Celui-ci avait établi un catalogue de plus de 1000 étoiles, repris ensuite par Ptolémée dans son *Almageste*. En réalité le nombre d'étoiles visibles sur la voute céleste s'élève à environ 6000 (3000 étoiles par hémisphère). Il faudra attendre les progrès de l'instrumentation pour comprendre la structure de notre Galaxie : William Herschel, au XVIIIe s., proposa pour la première fois une description de la forme de la Galaxie à partir de son travail de comptage des étoiles. Il calcule le temps qu'il lui faudrait pour couvrir tout le ciel avec son télescope : 800 ans ! Il s'est ainsi convaincu qu'il fallait procéder par échantillonnage et appliquer une méthodologie statistique (sondage).

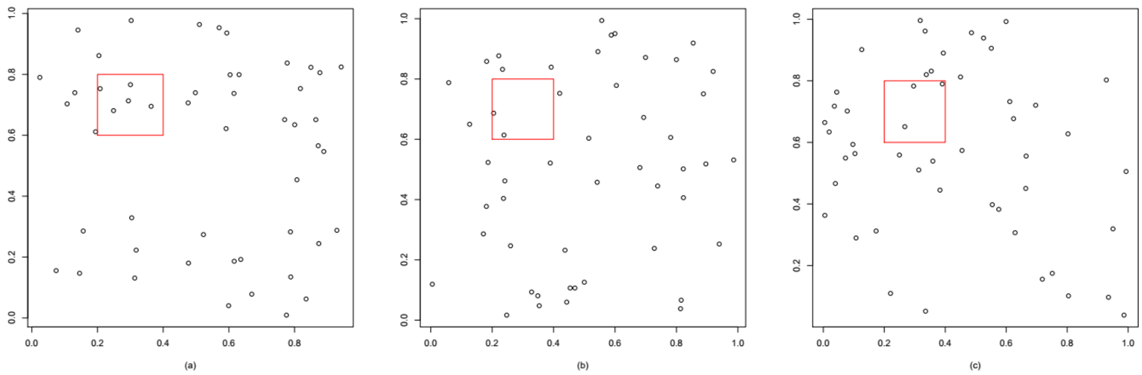
Matériel
une feuille A3 avec des dessins de petites étoiles,
une feuille A3 avec des dessins de grandes étoiles,
une feuille A3 avec une photo de champ d'oliviers,
une feuille A3 avec une photo de flamands roses sur un lac.

Cheminement expérimental. Pour compter le nombre d'étoiles, on peut commencer par découper l'espace en régions de densité homogène. Ensuite, dans chaque région, on compte le nombre d'étoiles sur une petite surface (échantillon), puis on estime par proportionnalité le nombre d'étoiles de la région. Pour estimer la proportion d'étoiles bleues, on compte par la même méthode le nombre total d'étoiles bleues, puis on calcule la proportion. Pour le champ d'oliviers, on remarque qu'il existe un motif régulier (une rangée). Il est naturel de compter le nombre d'oliviers pour une rangée, puis le nombre de rangées. On remarquera la fluctuation d'échantillonnage quand on change la position de l'échantillon à l'intérieur d'une région homogène. Il peut donc être judicieux de faire plusieurs estimations en déplaçant aléatoirement la position de l'échantillon et d'en faire la moyenne.

Si l'on souhaite estimer la densité d'étoiles, c'est-à-dire le nombre par unité de surface, plus la taille de l'échantillon est grande, meilleure est l'estimation.

Pour le champ d'oliviers et les petites étoiles, on utilisera plutôt le comptage par motif. Pour les grandes étoiles, le comptage par portion convient ; pour les flamands roses, le comptage par lot.

Éléments théoriques et notions en jeu. La répartition "au hasard" de points sur une surface plane est par exemple celle que l'on constate lorsqu'on observe au sol les premières gouttes de pluie d'un orage qui s'annonce. Cette répartition est reproduite par ordinateur sur la figure ci-dessous : les trois "fenêtres" (a) (b) et (c) sont des répétitions (ou réalisations) sur le domaine $[0,1] \times [0,1]$ du même phénomène aléatoire que l'on appelle processus ponctuel. Ici le processus est de type Poisson homogène, caractérisé par les propriétés suivantes : chaque point occupe une position aléatoire de loi uniforme sur le domaine, indépendante de la position des autres points.



Pour expliquer la notion d'homogénéité, considérons le nombre moyen N_S de points qui "tombent" sur une petite portion de surface S (cadre rouge) lors d'un grand nombre de répétitions du processus. Un processus ponctuel est dit homogène lorsque N_S ne dépend pas de la position de cette surface dans la fenêtre, et qu' il est uniquement proportionnel à l'aire $A(S)$ de la surface :

$$N_S = \lambda A(S)$$

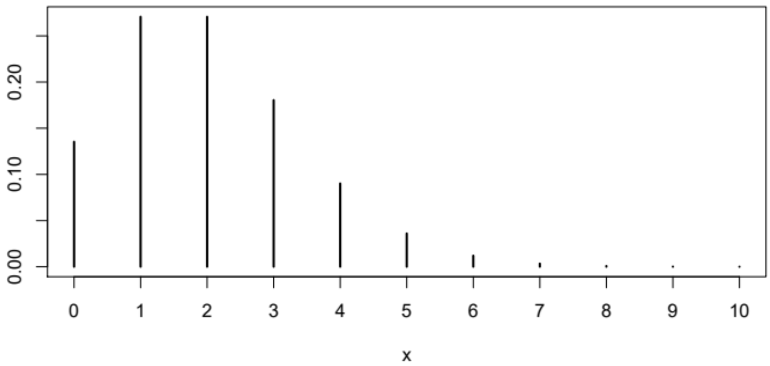
Le paramètre $\lambda > 0$ est appelé intensité du processus. Il correspond à la notion usuelle de densité surfacique (nombre moyen de points par unité de surface). Ici, ce paramètre vaut $\lambda = 50$ et induit un nombre moyen $N_S = 2$ pour la surface S d'aire 0.04.

Quant au nombre de points X_S constatés effectivement à l'intérieur de S, il est bien sûr aléatoire, et obéit à une loi Poisson de paramètre N_S :

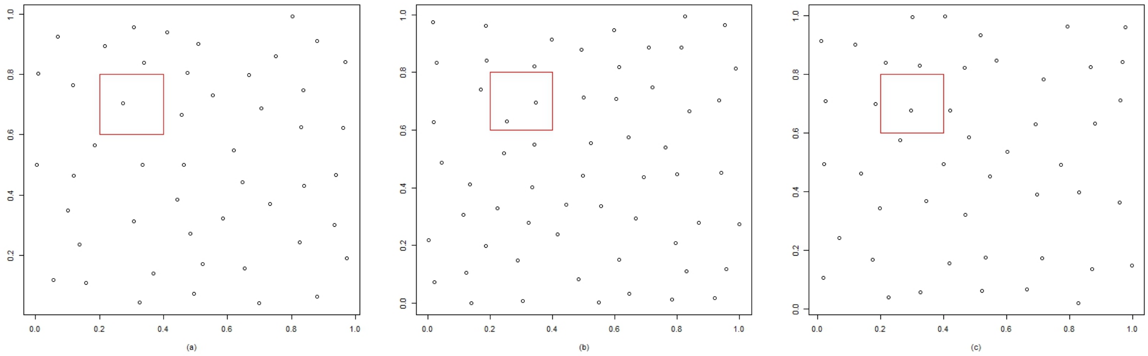
$$Prob[X_S = x] = exp(-N_S) * (N_S)^x/(x!) \qquad x = 0,1,2,3,...$$

La variance de X_S est calculable, elle vaut aussi N_S.

La figure ci-dessous donne le diagramme en bâtons de la distribution attendue de X_S : la loi est Poisson de paramètre $N_S = 2$



Dans le cas de l'image "grandes étoiles" proposée dans cette activité, la répartition est certes "au hasard", homogène, mais n'est plus de type Poisson. La position d'un point n'est pas indépendante de la position des autres points. Nous avons contraint les points à être situés les uns des autres à une distance supérieure à une valeur fixée $r_0 > 0$. Cela rend le processus beaucoup plus régulier, la variance de X_S diminue fortement. Ces processus sont appelés processus régulier à noyau dur. Exemple de processus aléatoire régulier à noyau dur sur le domaine $[0,1] \times [0,1]$: $\lambda = 50$ (comme sur les figures précédentes) et $r_0 = 0.1$



Dans ce type de processus on peut facilement trouver un alignement de points aléatoires. Cette propriété remarquable est contre-intuitive, mais elle peut être démontrée statistiquement. Cela a été avancé pour attribuer au simple hasard certains alignements "mystérieux" observables dans la nature, et pour réfuter les explications surnaturelles ou anthropiques.

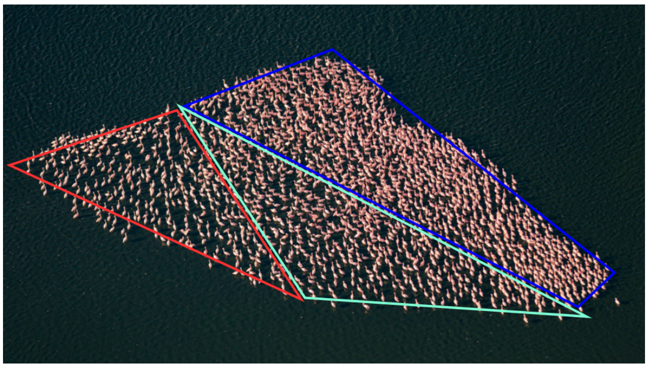
Solution. La solution exacte est connue uniquement pour les dessins d'étoiles et de chiffres, qui ont été réalisées par simulation. Les autres documents sont des photos.

Oliviers. On peut compter de façon exhaustive le nombre d'oliviers dans le champ. Pour une estimation, on évaluera le nombre d'oliviers dans une rangée : 14 oliviers (les ombres aident au comptage), et il y a environ 10 rangées. On peut estimer le nombre d'oliviers à 140.

Petites étoiles. L'affiche comporte 315 motifs de 11 étoiles, soit 3465 étoiles. Les 5 couleurs des étoiles sont équiréparties. Il y a donc exactement 20% d'étoiles bleues, soit 693.

Grandes Étoiles. L'affiche comporte 2525 étoiles. Les 5 couleurs des étoiles sont équiréparties. Il y a donc exactement 20% d'étoiles bleues, soit 505.

Flamands roses. On est preneur de toute estimation raisonnable.



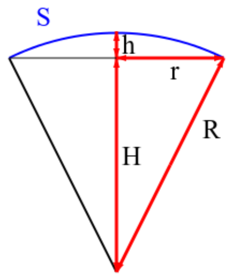
Zone de forte densité (quadrilatère bleu) : aire de $131cm^2$ (découpage en deux triangles, l'un de base $26cm$ et hauteur $7cm$, l'autre de base $20cm$ et hauteur $4cm$) densité de 8 au cm^2, soit 1048 flamands roses.
Zone de densité moyenne (triange vert : base $26cm$, hauteur $6cm$): 7 au cm^2, zone d'environ $78cm^2$. Soit 546 flamands roses.
Zone de faible densité (triange rouge : base $20cm$, hauteur $8cm$): 4 au cm^2, zone d'environ $80cm^2$. Soit 320 flamands roses.
On obtient un total d'environ 1914 flamands roses.

Réinvestissement en classe

Au lycée
Introduction au chapitre "échantillonage" : nécessité d'un échantillon et selon l'échantillon et sa position : fluctuation de l'estimation.
Peut être réinvesti ensuite avec le calcul de l'intervalle de fluctuation après la leçon.

Au collège
Différence entre dénombrer et estimer.
Mise en place d'une méthode propre à chacun.
Initiation aux problèmes ouverts (comptage des flamands roses).

Il est possible de réaliser un compteur d'étoiles en découpant dans une feuille un trou de 6 cm de rayon. En plaçant cette feuille trouée à 42 cm du visage, on peut compter le nombre d'étoiles visible dans le trou. En multipliant ce nombre par 100, on obtient une approximation du nombre d'étoiles visibles sur la demi-voute céleste.



En effet, par le trou, on voit une surface d'aire $S = 2\pi Rh$ tandis que la demi-voûte a une aire $S_{tot} = 2\pi R^2$. Avec $r = 6cm$, $H = 7r$, $R = \sqrt{H^2 + r^2}$ et $h = R - H$, on obtient :

$$\frac{S}{S_{tot}} = \frac{h}{R} = \frac{R-H}{R} = 1 - \frac{H}{R} = 1 - \frac{7}{\sqrt{50}} = 0{,}01005.$$

L'approximation de ce facteur par $1/100$ est tout à fait légitime. Voir référence "compteur d'étoiles" ci-dessous.

Lien avec la vie courante. On retrouve des applications possibles de processus ponctuels dans différents domaines.
Astronomie : la cartographie des galaxies a permis de se rendre compte qu'elles s'éloignaient de nous, ce qu'on explique par le phénomène d'inflation de l'univers (Big Bang) ;
Biologie : étudier la répartition spatiale des animaux ou des plantes permet de comprendre les phénomènes de compétition entre les espèces, migrations, etc ;
Santé : les cas observés de certaines maladies sont répertoriés sur une carte afin de déceler d'éventuels foyers infectieux ;
Microscopie : les processus ponctuels s'appliquent aussi à l'étude de la structure des roches, des métaux ou des tissus cellulaire ;
Sciences de la Terre : la localisation des tremblements de terre sur une carte donne des indications sur les grandes lignes de faille et le mouvement des plaques tectoniques.

Références

[1] http://ekladata.com/33218Vr6YTDVUPux368_mb0Ctn8/compteur-etoiles.pdf
[2] "La statistique des étoiles" Tangente HS 21, L'Astronomie, p104-109, éd. Pôle.